Primitives

EXERCICE 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+3} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \qquad g : x \longmapsto \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h : x \longmapsto \cos^2(x)\sin(2x) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \qquad i : x \longmapsto \frac{1}{x^7} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^\star$$

EXERCICE 2.

Calculer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;
2) $t \mapsto \dfrac{e^{\arctan(t)}}{1+t^2}$;
3) $t \mapsto (\tan(t)+1)^2$;
4) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$;
5) $t \mapsto |t^2-4t+3|$;
6) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$;
7) $t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+1}$;
8) $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$;
9) $t \mapsto \sin(t)\cos^5(t)$.

EXERCICE 3.

1) Déterminer une primitive de la fonction ψ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi_1(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$.
2) Déterminer une primitive de la fonction ψ_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi_2(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+2x+5}$.
3) Déterminer une primitive de la fonction ψ_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi_3(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+5}$.

EXERCICE 4. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \cos^5(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \qquad g : x \longmapsto \mathrm{sh}^3(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Calcul d'intégrales

EXERCICE 5. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \qquad I_2 = \int_2^4 \frac{dt}{t\ln(t)}$$

$$I_3 = \int_0^2 te^{-t^2}\,dt \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{t+1}{t+3}\,dt$$

EXERCICE 6. Calculer les intégrales suivantes via des intégrations par parties

$$I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,dt \qquad I_3 = \int_0^1 t^2\cos(t)\,dt$$

EXERCICE 7. A l'aide du changement de variable proposé, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad \text{en posant } u = \sqrt{x}$$

$$I_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} \quad \text{en posant } z = \sqrt{x-2}$$

$$I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \quad \text{en posant } t = \tan(u)$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \quad \text{en posant } u = \cos(x)$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt \quad \text{en posant } u = \pi - t \text{ et se ramener à } I_4.$$

EXERCICE 8. Déterminer les primitives des fonctions suivantes via du calcul intégral :

$$f : x \longmapsto x\cos(x) \qquad \text{sur } \mathbb{R}, \qquad g : x \longmapsto \frac{1}{x^2+2x+3} \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

EXERCICE 9. On pose, pour tout $x > 1$, $I(x) = \int_1^x \sin(\ln(t))\,dt$. En effectuant deux intégrations par parties successives, trouver une équation "simple" sur $I(x)$. En déduire $I(x)$.

EXERCICE 10. On pose $I = \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx$. Le but est de calculer I de deux façons différentes.

1) par intégrations par parties.

2) par les complexes.

EXERCICE 11. Intégrales de Wallis Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Déterminer une relation de récurrence liant I_{n+2} et I_n.

3) En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 12. On considère $f : x \mapsto \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$. Montrer que f est dérivable et déterminer f'.

EXERCICE 13 ☆ . Soit $x \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\,dt.$$

Montrer que f est constante puis préciser sa valeur.
